

Konstruktion von Invariantenringen ohne die Cohen-Macaulay Eigenschaft

Projektarbeit von Martin Kohls
Betreuer: Prof. Dr. Gregor Kemper

17. Oktober 2003

Zusammenfassung

In dieser Projektausarbeitung werden für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K positiver Charakteristik und die Gruppen $G = SL_n(K)$ bzw. $GL_n(K)$ Beispiele von G -Moduln V konstruiert, so dass der Invariantenring $K[V]^G$ nicht Cohen-Macaulay ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Erste Kohomologie algebraischer Gruppen	2
2	Eine Eigenschaft reductiver Gruppen	7
3	Konstruktion eines nicht Cohen-Macaulay Invariantenrings	8
4	Konstruktion nicht zerfallender Sequenzen	9

Einleitung

Die Cohen-Macaulay Eigenschaft spielt eine wichtige Rolle in der Invariantentheorie. Der berühmte Satz von Hochster und Roberts [3] besagt z.B., dass für eine linear reductive Gruppe G und einen G -Modul V der Invariantenring $K[V]^G$ Cohen-Macaulay ist. In der Arbeit [4, S. 1026] dagegen bemerken Hochster und Eagon:

We know of no example in which G is reductive or connected [...] and R^G is not Cohen-Macaulay.

In dieser Arbeit werden solche Beispiele für $R = K[V]$ konstruiert.

Nach Kemper [1] gilt auch die folgende Umkehrung des Resultats von Hochster und Roberts: Wenn G reaktiv und $K[V]^G$ für jeden G -Modul V Cohen-Macaulay

ist, dann ist G sogar linear reduktiv. Den dort gegebenen Widerspruchsbeweis verwenden wir für die Konstruktion eines nicht Cohen-Macaulay Invariantenrings $K[V]^G$. Da in Charakteristik 0 die Eigenschaften reduktiv und linear reduktiv äquivalent sind, können wir dabei aufgrund des Resultats von Hochster und Roberts positive Charakteristik voraussetzen.

Im Folgenden bezeichnen wir daher mit K stets einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit positiver Charakteristik $\text{char } K = p$ und mit G stets eine lineare algebraische Gruppe. Wir geben zunächst den Teil der Arbeit [1] wieder, der zu folgendem Resultat führt:

Ist G eine reduktive Gruppe, $0 \rightarrow U \rightarrow \tilde{U} \rightarrow K \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von G -Moduln, die nicht zerfällt, so ist mit $V := U^ \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{U}$ der Invariantenring $K[V]^G$ nicht Cohen-Macaulay.*

Das eigentliche Resultat des Projekts ist die Angabe solcher Sequenzen, womit die Arbeit schließt.

1 Erste Kohomologie algebraischer Gruppen

Sei V ein G -Modul. Ein Morphismus von affinen Varietäten¹ $g : G \rightarrow V$, $\sigma \mapsto g_\sigma$ heißt *1-Kozyklus*, falls $g_{\sigma\tau} = \sigma(g_\tau) + g_\sigma$ für alle $\sigma, \tau \in G$. Die additive Gruppe aller 1-Kozyklen (die zugleich ein K -Vektorraum ist) wird mit $Z^1(G, V)$ bezeichnet. Für ein $v \in V$ ist durch $\sigma \mapsto (\sigma - 1)v := \sigma(v) - v$ ein spezieller 1-Kozyklus gegeben. Die Untergruppe dieser 1-Kozyklen wird mit $B^1(G, V)$ bezeichnet, und die zugehörige Faktorgruppe $Z^1(G, V)/B^1(G, V)$ mit $H^1(G, V)$.

Bemerkung 1. *Sei*

$$0 \rightarrow V \hookrightarrow \tilde{V} \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von G -Moduln.² Diese zerfällt genau dann, wenn für ein (und dann alle) $v_0 \in \pi^{-1}(1)$ und den durch $g_\sigma := (\sigma - 1)v_0$ definierten Kozyklus $g \in Z^1(G, V)$ gilt, dass g sogar in $B^1(G, V)$ liegt.

Beweis. Wenn die Sequenz zerfällt, so hat V ein Komplement W in \tilde{V} , das wegen $\dim \tilde{V} = \dim \text{Im } \pi + \dim \text{Kern } \pi = 1 + \dim V$ eindimensional ist. Ist $v_0 = v + w$ mit $v \in V, w \in W$, so gibt es also zu $\sigma \in G$ ein $\lambda \in K$ mit $\sigma w = \lambda w$. Aus $1 = \pi(v_0) = \pi(w) = \sigma\pi(w) = \pi(\sigma w) = \pi(\lambda w) = \lambda\pi(w)$ folgt $\lambda = 1$, und w ist G -invariant. Es folgt $g_\sigma = (\sigma - 1)v$, also $g \in B^1(G, V)$.

Ist umgekehrt $g \in B^1(G, V)$, also $g_\sigma = (\sigma - 1)v$ mit $v \in V$, so ist $K(v_0 - v)$ ein G -invariantes Komplement zu V . \square

¹d.h. eine durch Polynome in den Koeffizienten eines Gruppenelements $\sigma \in G \subseteq K^r$ gegebene Abbildung

² K soll dabei stets triviale G -Operation haben

Es ist nützlich, sich mit der Darstellung von G auf \tilde{V} vertraut zu machen: Wir ergänzen v_0 mit Hilfe einer Basis von V zu einer Basis von \tilde{V} . Ist dann A_σ die Darstellung von σ auf V und identifizieren wir g_σ mit seinem Koordinatenvektor bzgl. der Basis von V , so hat σ bzgl. der Basis von \tilde{V} die Darstellung $\begin{pmatrix} A_\sigma & g_\sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Insbesondere finden wir in der Identität

$$\begin{pmatrix} A_{\sigma\tau} & g_{\sigma\tau} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\sigma & g_\sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_\tau & g_\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\sigma A_\tau & A_\sigma g_\tau + g_\sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Kozyklus-Eigenschaft von g wieder. Daher kann man aus gegebenem $g \in Z^1(G, V)$ durch $\tilde{V} := V \oplus K$ und $\sigma(v, \lambda) := (\sigma v + \lambda g_\sigma, \lambda) \cong \begin{pmatrix} A_\sigma & g_\sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \lambda \end{pmatrix}$ sowie $\pi(v, \lambda) := \lambda$ eine kurze exakte Sequenz definieren. Wir sagen, \tilde{V} wird von g induziert. Ist $(v, 1) \in \pi^{-1}(1)$, so ist $(\sigma - 1)(v, 1) = (g_\sigma + \sigma(v) - v, 0)$, so dass man aus dieser Sequenz die Restklasse von g in $H^1(G, V)$ zurückgewinnen kann.

Wir bezeichnen im Folgenden die durch ein $\sigma \in G$ durch Operation induzierte lineare Abbildung ebenfalls mit σ , auch dann wenn damit verschiedene lineare Abbildungen auf zwei G -Moduln V, W mit dem selben Symbol bezeichnet werden. Mit dieser Notation wird $\text{Hom}_K(V, W)$ zu einem G -Modul durch die Operation

$$G \times \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(V, W), \quad (\sigma, f) \mapsto \sigma f := \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}.$$

Da G auf K stets trivial operieren soll, haben wir damit insbesondere für $\varphi \in V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ die Operation $\sigma \varphi = \varphi \circ \sigma^{-1}$.

Es ist

$$f \in \text{Hom}_K(V, W)^G \Leftrightarrow \sigma f = f \text{ bzw. } f \circ \sigma = \sigma \circ f \quad \forall \sigma \in G,$$

also gilt $\text{Hom}_K(V, W)^G = \text{Hom}_G(V, W)$.

Für später benötigen wir noch zwei kanonische Homomorphismen. Aufgrund der endlichen Dimension ist

$$f : V \rightarrow V^{**}, \quad v \mapsto f_v : \quad V^* \ni \varphi \mapsto f_v(\varphi) := \varphi(v)$$

ein K -Isomorphismus. Wegen

$$f_{\sigma v}(\varphi) = \varphi(\sigma v) = (\sigma^{-1} \varphi)(v) = f_v(\sigma^{-1} \varphi) = (\sigma f_v)(\varphi)$$

gilt $f_{\sigma v} = \sigma f_v$ und f ist auch ein G -Homomorphismus. Es gilt also $V \cong V^{**}$ auch als G -Moduln.

Durch lineare Fortsetzung wird durch

$$W \otimes V \rightarrow \text{Hom}_K(V^*, W), \quad w \otimes v \mapsto f_{w \otimes v} : \quad V^* \ni \varphi \mapsto \varphi(v)w$$

ein weiterer kanonischer K -Isomorphismus gegeben, der wegen

$$\begin{aligned} f_{\sigma w \otimes \sigma v}(\varphi) &= \varphi(\sigma v) \sigma w = \sigma((\sigma^{-1} \varphi)(v) w) = \\ \sigma(f_{w \otimes v}(\sigma^{-1} \varphi)) &= (\sigma \circ f_{w \otimes v} \circ \sigma^{-1})(\varphi) = (\sigma f_{w \otimes v})(\varphi) \end{aligned}$$

die Gleichung $f_{\sigma(w \otimes v)} = \sigma f_{w \otimes v}$ erfüllt, also ein G -Homomorphismus ist.

Proposition 2. *G ist genau dann linear reduktiv, wenn $H^1(G, V) = 0$ für jeden G -Modul V gilt.*

Beweis. Wenn G linear reduktiv ist, zerfällt jede kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow V \rightarrow \tilde{V} \rightarrow K \rightarrow 0$, also gilt nach Bemerkung 1, dass $H^1(G, V) = 0$.

Sei umgekehrt $H^1(G, V) = 0$ für jeden G -Modul V . Dann ist jede kurze exakte Sequenz wie oben zerfallend, und für jeden Epimorphismus $F : V \rightarrow W$ von G -Moduln ist auch die Restriktion $V^G \rightarrow W^G$ surjektiv: Denn für $0 \neq w \in W^G$ ist mit $V_w = F^{-1}(\langle w \rangle)$ eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \text{Ker } F \rightarrow V_w \rightarrow \langle w \rangle \cong K \rightarrow 0$ gegeben, die nach Voraussetzung zerfällt und daher ein Urbild von w in V^G liefert. Sei nun eine beliebige kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{\varepsilon} V \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 0 \quad (1)$$

von G -Moduln gegeben. Diese gibt mittels

$$\Gamma : \text{Hom}_K(W, U) \rightarrow \text{Hom}_K(V, U), \quad g \mapsto g \circ \pi$$

$$\Lambda : \text{Hom}_K(V, U) \rightarrow \text{Hom}_K(U, U), \quad f \mapsto f \circ \varepsilon$$

Anlass zu folgender kurzen exakten Sequenz:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_K(W, U) \xrightarrow{\Gamma} \text{Hom}_K(V, U) \xrightarrow{\Lambda} \text{Hom}_K(U, U) \rightarrow 0.$$

Dabei folgt die Injektivität von Γ aus der Surjektivität von π , und die Surjektivität von Λ aus der Injektivität von ε . Aus $\pi \circ \varepsilon = 0$ folgt $\text{Im } \Gamma \subseteq \text{Ker } \Lambda$. Die umgekehrte Inklusion folgt wegen Dimensionsgründen aus einem Liftungsargument.³

Wie wir gesehen haben, ist dann jedenfalls auch die Restriktion $\text{Hom}_G(V, U) \xrightarrow{\Lambda} \text{Hom}_G(U, U)$ surjektiv, insbesondere gibt es ein Urbild von id_U , also ein f mit $f \circ \varepsilon = \text{id}_U$. Dies zeigt, dass (1) zerfällt, und U hat ein Komplement in V , d.h. G ist linear reduktiv. \square

Sei $g \in Z^1(G, V)$, wobei wir die zugehörige Restklasse von g in $H^1(G, V)$ ebenfalls mit g bezeichnen. Ist W ein weiterer G -Modul, $w \in W^G$, so ist $\sigma \mapsto w \otimes g_\sigma$ wegen $\sigma w = w \quad \forall \sigma \in G$ aus $Z^1(G, W \otimes V)$. Die zugehörige Restklasse in $H^1(G, W \otimes V)$

³Aus $f \in \text{Ker } \Lambda$ folgt $f \circ \varepsilon = 0$, also $f|_{\text{Im } \varepsilon} = f|_{\text{Ker } \pi} = 0$. Da π surjektiv, kann man $f = g \circ \pi$ sogar mit eindeutig bestimmten g schreiben.

bezeichnen wir mit $w \otimes g$. Sie ist unabhängig von dem Repräsentanten von g in $Z^1(G, V)$, da

$$w \otimes (g_\sigma + \sigma(v) - v) = w \otimes g_\sigma + \sigma(w \otimes v) - w \otimes v$$

wegen $w \in W^G$.

Proposition 3. *Sei V ein G -Modul, $g \in H^1(G, V)$ und \tilde{V} der von einem Repräsentanten von g in $Z^1(G, V)$ induzierte G -Modul. Dann gibt es einen G -Modul W (nämlich $W = \tilde{V}^*$) und ein $0 \neq w \in W^G$ mit $w \otimes g = 0$ in $H^1(G, W \otimes V)$.*

*Beweis.*⁴ Die von g induzierte kurze exakte Sequenz bezeichnen wir mit

$$0 \rightarrow V \rightarrow \tilde{V} \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 0.$$

Sei zunächst W ein beliebiger G -Modul, und $0 \neq w \in W^G$. Wir leiten Bedingungen für $w \otimes g = 0$ her. Wir betrachten den G -Homomorphismus

$$\varphi : K \rightarrow W, \quad c \mapsto cw$$

und den „Pullback“

$$M := (W \otimes \tilde{V}) \times_W K := \{(a, c) \in (W \otimes \tilde{V}) \oplus K : (\text{id}_W \otimes \pi)(a) = \varphi(c)\}.$$

Wir berechnen M explizit. Sei dazu $\{w_1, \dots, w_n\}$ Basis von W mit $w_1 = w$, und $\{v_1, \dots, v_m\}$ Basis von V . Dann hat $a \in W \otimes \tilde{V}$ eine Darstellung

$$a = \sum_{i=1..n, j=1..m} a_{ij} w_i \otimes (v_j, 0) + \sum_{i=1..n} b_i w_i \otimes (0, 1) \quad \text{mit } a_{ij}, b_i \in K.$$

Also haben wir die Bedingung

$$(\text{id}_W \otimes \pi)(a) = \sum_{i=1..n} b_i w_i \stackrel{!}{=} \varphi(c) = cw_1$$

und damit $b_i = c\delta_{1i}$. Es gilt also

$$(a, c) \in M \Leftrightarrow a = \sum_{i=1..n, j=1..m} a_{ij} w_i \otimes (v_j, 0) + cw_1 \otimes (0, 1).$$

Da

$$\sigma(cw_1 \otimes (0, 1)) = cw_1 \otimes (g_\sigma, 1) = cw_1 \otimes (g_\sigma, 0) + cw_1 \otimes (0, 1),$$

wird M durch $\sigma(a, c) := (\sigma a, c)$ zu einem G -Modul.

Offenbar ist $M \cong \widetilde{W \otimes V}$, wobei $\widetilde{W \otimes V}$ aus $W \otimes V$ mittels $(w_1 \otimes g_\sigma) \in Z^1(G, W \otimes V)$ entsteht. Dabei ist $\widetilde{W \otimes V} \cong M$ gegeben durch

$$\left(\sum a_{ij} w_i \otimes v_j, c \right) \mapsto \sum a_{ij} w_i \otimes (v_j, 0) + cw_1 \otimes (0, 1).$$

⁴siehe auch [2]

Daher ist mit $\tilde{\pi}(a, c) = c$ durch

$$0 \rightarrow W \otimes V \rightarrow M \xrightarrow{\tilde{\pi}} K \rightarrow 0 \quad (2)$$

eine kurze exakte Sequenz gegeben, die genau dann zerfällt, wenn $w \otimes g = 0$ gilt. Andererseits zerfällt (2) genau dann, wenn es einen G -Homomorphismus $p' : K \rightarrow W \otimes \tilde{V}$ gibt, so dass folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & K & \\ p' \swarrow & & \searrow \varphi \\ W \otimes \tilde{V} & \xrightarrow{\text{id}_W \otimes \pi} & W \end{array}$$

kommutiert. In diesem Fall gilt nämlich mit

$$p : K \rightarrow M, \quad c \mapsto (p'(c), c) \stackrel{!}{\in} M$$

(wegen $\text{id}_W \otimes \pi(p'(c)) = \varphi(c)$), dass $\tilde{\pi}(p(c)) = c$, also $\tilde{\pi} \circ p = \text{id}_K$, d.h. (2) zerfällt. Der kanonische Homomorphismus $W \otimes \tilde{V} \rightarrow \text{Hom}_K(\tilde{V}^*, W)$ und der G -Homomorphismus

$$\text{Hom}_K(\tilde{V}^*, W) \rightarrow W, \quad f \mapsto f(\pi)$$

lassen folgendes Diagramm kommutieren,

$$\begin{array}{ccc} W \otimes \tilde{V} & \xrightarrow{\text{id}_W \otimes \pi} & W \\ & \searrow \cong & \uparrow \\ & & \text{Hom}_K(\tilde{V}^*, W) \end{array}$$

wie man am leichtesten mit Tensoren überprüft:

$$\begin{array}{ccc} w \otimes (v, \lambda) & \xrightarrow{\text{id}_W \otimes \pi} & \lambda w \\ & \searrow \cong & \uparrow (\psi = \pi) \\ & & (\psi \mapsto \psi(v, \lambda)w) \end{array}$$

Durch Zusammenfügen beider Diagramme sieht man, dass (2) genau dann zerfällt (bzw. $w \otimes g = 0$ gilt), wenn es einen G -Homomorphismus $K \rightarrow \text{Hom}_K(\tilde{V}^*, W)$

⁵Weil $\sigma f = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1} \mapsto \sigma(f(\sigma^{-1}(\pi))) = \sigma(f(\pi))$, da $\pi \in \text{Hom}_G(\tilde{V}, K) = \text{Hom}_K(\tilde{V}, K)^G$.

gibt, so dass

$$\begin{array}{ccc} & & K \\ & \swarrow & \downarrow \varphi \\ \text{Hom}_K(\tilde{V}^*, W) & \longrightarrow & W \end{array}$$

kommutiert. Bezeichnet man das Bild von 1 unter diesem Homomorphismus mit f , und beachtet man, dass ein solcher Homomorphismus eindeutig durch sein (G -invariantes) Bild von 1 bestimmt ist, so sieht man, dass die letzte Bedingung äquivalent ist zur Existenz eines

$$f \in \text{Hom}_K(\tilde{V}^*, W)^G = \text{Hom}_G(\tilde{V}^*, W) \text{ mit } f(\pi) = \varphi(1) = w.$$

Also können wir $W = \tilde{V}^*$, $f = \text{id}$, $w := f(\pi) = \pi$ wählen. \square

2 Eine Eigenschaft reduktiver Gruppen

Für die Konstruktion eines nicht Cohen-Macaulay Invariantenrings $K[V]^G$ benötigen wir nur ein einziges Lemma über reduktive Gruppen. Bevor wir es formulieren, stellen wir einige Aussagen über Parametersysteme zusammen.

Sei dazu im folgenden R eine noethersche, zusammenhängende, graduierte, nullteilerfreie Algebra über K .

Dann bilden homogene Elemente $f_1, \dots, f_r \in R$ ein *partielles homogenes Parametersystem* (*phsop*), wenn sie sich zu einem homogenen Parametersystem (*hsop*) $f_1, \dots, f_n \in R$ ergänzen lassen, d.h. f_1, \dots, f_n sind homogen und algebraisch unabhängig über K , und R ist endlich erzeugt als Modul über $A = K[f_1, \dots, f_n]$. R ist *Cohen-Macaulay*, falls R sogar frei über A ist (für ein und dann alle *hsop*).

$\{f_1, \dots, f_r\}$ heißt eine *reguläre Sequenz*, falls $\forall i = 1..r$ gilt:

$$\forall g \in R : \quad f_i g \in (f_1, \dots, f_{i-1}) \Rightarrow g \in (f_1, \dots, f_{i-1}).$$

Jede reguläre Sequenz ist ein *phsop*, und wenn R Cohen-Macaulay ist, so ist jedes *phsop* eine reguläre Sequenz.

Letztere Eigenschaft wird für die Konstruktion eines nicht Cohen-Macaulay Invariantenrings entscheidend sein, ebenso wie folgendes Lemma über die benötigte Eigenschaft reduktiver Gruppen, welches wir ohne Beweis formulieren. (Siehe [1] für einen Beweis.)

Lemma 4. *Sei G eine reduktive Gruppe und V ein G -Modul. Wenn $a_1, \dots, a_k \in K[V]^G$ ein *phsop* in $K[V]$ bilden, dann auch in $K[V]^G$.*

3 Konstruktion eines nicht Cohen-Macaulay Invariantenrings

Proposition 5. *Sei G eine reduktive Gruppe und V ein G -Modul, so dass $K[V]^G$ Cohen-Macaulay ist. Falls die Elemente $a_1, a_2, a_3 \in K[V]^G$ ein phsop in $K[V]$ bilden, dann ist die durch die Multiplikation mit (a_1, a_2, a_3) gegebene Abbildung*

$$H^1(G, K[V]) \rightarrow H^1(G, K[V]^3)$$

injektiv.

Beweis. Nach Lemma 4 bilden a_1, a_2, a_3 auch ein phsop in dem CM Ring $K[V]^G$, also dort sogar eine reguläre Sequenz. Sei nun $g \in Z^1(G, K[V])$ ein Kozyklus, dessen Restklasse in $H^1(G, K[V])$ durch Multiplikation mit (a_1, a_2, a_3) auf 0 abgebildet wird.⁶ Dann gibt es $b_i \in K[V]$ mit $(\sigma-1)b_i = a_i g_\sigma \quad \forall \sigma \in G, \quad i = 1, 2, 3$. Sei $u_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$ für $1 \leq i < j \leq 3$. Offenbar ist $u_{ij} \in K[V]^G$, und es gilt

$$u_{23}a_1 - u_{13}a_2 + u_{12}a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Aufgrund der Regularität von a_1, a_2, a_3 liegt dann u_{12} in dem von a_1, a_2 erzeugten Ideal in $K[V]^G$, d.h. es gibt $f_1, f_2 \in K[V]^G$ mit $a_1 b_2 - a_2 b_1 = f_1 a_1 + f_2 a_2$. Weiter sind wegen der Regularität a_1, a_2 teilerfremde Polynome⁷, und es folgt, dass a_1 Teiler von $f_2 + b_1$ ist, also $f_2 + b_1 = a_1 \cdot h$ mit $h \in K[V]$. Nun ist

$$a_1 \cdot (\sigma-1)h = (\sigma-1)(a_1 h) = (\sigma-1)(f_2 + b_1) = (\sigma-1)b_1 = a_1 g_\sigma \quad \forall \sigma \in G,$$

also $g_\sigma = (\sigma-1)h$. Damit ist die Restklasse von g in $H^1(G, K[V])$ gleich 0, was die Injektivität beweist. \square

Wir können nun den zentralen Satz formulieren.

Satz 6. *Sei G eine reduktive, nicht linear reduktive Gruppe. Dann gibt es einen G -Modul V , so dass $K[V]^G$ nicht Cohen-Macaulay ist.*

Ist genauer $0 \rightarrow U \rightarrow \tilde{U} \rightarrow K \rightarrow 0$ eine nicht zerfallende kurze exakte Sequenz von G -Moduln (die wegen Proposition 2 existiert) und W ein G -Modul wie in Proposition 3, z.B. $W = \tilde{U}^$, so kann man*

$$\begin{aligned} V &= U^* \oplus W^* \oplus W^* \oplus W^* \\ (\text{bzw. } V &= U^* \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{U}) \end{aligned}$$

⁶ Aus $a_i \in K[V]^G$ folgt $a_i g_{\sigma\tau} = a_i \sigma(g_\tau) + a_i g_\sigma = \sigma(a_i g_\tau) + a_i g_\sigma$, d.h. $a_i g \in Z^1(G, K[V])$.

⁷Ist $d \in K[V]$ ein gemeinsamer Teiler, $a_1 = dh$ so folgt $a_2 h \in (a_1)$, also gilt mit der Regularität $h \in (a_1)$, d.h. d ist Einheit. Dabei beachte man, dass a_1, a_2 ein phsop in dem CM Ring $K[V]$ bilden, also dort sogar eine reguläre Sequenz.

wählen.

Beweis. Sei also $0 \neq g \in H^1(G, U)$ und W ein G -Modul, der ein $0 \neq w \in W^G$ mit $w \otimes g = 0$ in $H^1(G, W \otimes U)$ enthält. Da $U^{**} \cong U, W^{**} \cong W$ haben wir also bis auf Isomorphie

$$R := K[V] \cong S(U \oplus W \oplus W \oplus W)$$

(die symmetrische Algebra in $U \oplus W \oplus W \oplus W$, also “Polynome in Basisvektoren aus $U \oplus W \oplus W \oplus W$ ”). Sei a_i die Kopie von w im i -ten Summanden von W in der direkten Summe ($i = 1, 2, 3$). Dann liegen a_1, a_2, a_3 in $K[V]^G$ und bilden ein phsop in $K[V]$. Da U ein direkter Summand von R ist, haben wir eine Einbettung $H^1(G, U) \hookrightarrow H^1(G, R)$. Aufgrund der drei Kopien von W^* in V haben wir ebenfalls drei Einbettungen $H^1(G, W \otimes U) \hookrightarrow H^1(G, R)$. Das Bild von $w \otimes g$ unter diesen Einbettungen ist $a_i \cdot g$ ($i = 1, 2, 3$). Da jedoch $w \otimes g = 0$, wird das Bild von g in $H^1(G, R)$ unter der durch Multiplikation mit (a_1, a_2, a_3) induzierten Abbildung $H^1(G, R) \rightarrow H^1(G, R^3)$ auf 0 abgebildet. Wegen Proposition 5 kann daher $K[V]^G$ nicht Cohen-Macaulay sein. \square

4 Konstruktion nicht zerfallender Sequenzen

Wir kommen nun zu dem Hauptresultat dieser Arbeit, nämlich der Konstruktion nicht zerfallender kurzer exakter Sequenzen für die (reduktiven) Gruppen $GL_n(K)$ und $SL_n(K)$ für beliebiges $\text{char } K = p$.

Um die Bedeutung der Voraussetzung des nächsten Satzes zu sehen, berechnen wir für $\text{char } K = 2$ die Menge aller $A \in GL_2(K)$ mit $A^T A = I_2$ (in positiver Charakteristik ist dies nicht $O_2(K)$):

Aus $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt $a^2 + b^2 = (a + b)^2 = 1$, also $b = a + 1$, und analog $c = a + 1$, sowie zuletzt noch $d = b + 1 = a$. Also ist die gesuchte Menge gleich

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a \end{pmatrix} : a \in K \right\} \text{ für } \text{char } K = 2.$$

Satz 7. Sei K ein (algebraisch abgeschlossener) Körper mit $\text{char } K = p > 0$, $n \geq 2$ und G eine Untergruppe von $GL_n(K)$ mit

(a) Falls $p = 2$: $\begin{pmatrix} a & a+1 & & \\ a+1 & a & & \\ & & I_{n-2} & \end{pmatrix} \in G$ für wenigstens drei verschiedene Werte von $a \in K$ ($a = 1$ ist stets ein solcher).

(b) Falls $p \geq 3$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ & & I_{n-2} \end{pmatrix} \in G$.

Sei weiter V der Raum aller homogenen Polynome vom Grad p in den Variablen x_1, \dots, x_n . Ist $(a_{ij}) \in G$, so ist durch $(a_{ij}) \cdot x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$ die kanonische Operation von G auf V gegeben, wodurch V zu einem G -Modul wird. Sei $W := \langle x_1^p, \dots, x_n^p \rangle \leq V$ und $U := \{f \in \text{Hom}_K(V, W) : f|_W = 0\}$. Da W aufgrund des Frobenius-Homomorphismus ein G -Untermodul von V ist, ist U ein G -Modul. Sei ferner $\iota \in \text{Hom}_K(V, W)$ gegeben durch $\iota|_W = \text{id}_W$ und ι gleich 0 auf allen Monomen, die nicht in W liegen. Sei $\tilde{U} := U \oplus K\iota$ und $\pi : \tilde{U} \rightarrow K$ gegeben durch $\pi(u + \lambda \cdot \iota) := \lambda$ für $u \in U, \lambda \in K$. Dann ist durch

$$0 \rightarrow U \rightarrow \tilde{U} \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz gegeben, die nicht zerfällt.

Beweis. Wir verwenden für V eine monomiale Basis \mathcal{B} , wobei wir die Reihenfolge der ersten $n+1$ bzw. $n+2$ Monome in den Fällen (a) bzw. (b) vorgeben, und zwar im Fall (a):

$$\mathcal{B} = \{x_1^2, \dots, x_n^2, x_1 x_2, \dots\}$$

im Fall (b):

$$\mathcal{B} = \{x_1^p, \dots, x_n^p, x_1^{p-1} x_2, x_1^{p-2} x_2^2, \dots\}$$

Als Basis von W dienen die ersten n Einträge von \mathcal{B} . Sei $N := |\mathcal{B}| = \binom{n+p-1}{p}$. Wir bezeichnen mit $f_p : \text{GL}_n(K) \rightarrow \text{GL}_n(K)$ den koeffizientenweisen Frobenius-Homomorphismus, also $f_p(a_{ij}) = (a_{ij}^p)$. Ist $A_\sigma \in K^{N \times N}$ die Darstellungsmatrix von $\sigma \in G$ bzgl. der Basis \mathcal{B} , so hat diese die Form

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} f_p(\sigma) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Weiter haben wir bzgl. der Basis \mathcal{B}

$$U \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & B \end{pmatrix} \in K^{n \times N} \text{ mit } B \in K^{n \times (N-n)} \right\},$$

und für $U \ni f \cong \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & B \end{pmatrix}$ bzgl. \mathcal{B} haben wir die Operation gegeben durch

$$\sigma \cdot f = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1} \cong f_p(\sigma) \cdot \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & B \end{pmatrix} \cdot A_{\sigma^{-1}}.$$

Die Darstellungsmatrix von ι ist gegeben durch

$$\iota \cong \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} =: J \in K^{n \times N}.$$

Da

$$\sigma \cdot \iota = \sigma \circ \iota \circ \sigma^{-1} \cong f_p(\sigma) \left(\begin{array}{cc} I_n & 0 \end{array} \right) \underbrace{\left(\begin{array}{cc} f_p(\sigma^{-1}) & * \\ 0 & * \end{array} \right)}_{A_{\sigma^{-1}}} = \left(\begin{array}{cc} I_n & * \end{array} \right)$$

ist $\sigma\iota - \iota \in U$. Damit ist π wohldefiniert, und mit $g_\sigma := (\sigma - 1)\iota$ ist $g \in Z^1(G, U)$. Wir müssen zeigen, dass $g \notin B^1(G, U)$. Wir nehmen das Gegenteil an, also die Existenz eines

$$U \ni u \cong Z = \left(\begin{array}{cc} 0_{n \times n} & \hat{Z} \end{array} \right) \in K^{n \times N}, \quad \hat{Z} = (z_{ij}) \in K^{n \times (N-n)}$$

mit $g_\sigma = (\sigma - 1)\iota \stackrel{!}{=} (\sigma - 1)u$ für alle $\sigma \in G$ bzw.

$$f_p(\sigma)JA_{\sigma^{-1}} - J \stackrel{!}{=} f_p(\sigma)ZA_{\sigma^{-1}} - Z \quad \forall \sigma \in G. \quad (3)$$

Diese letzte Gleichung führen wir nun in beiden Fällen zum Widerspruch.

(a) Mit

$$\sigma^{-1} = \left(\begin{array}{cc} a & a+1 \\ a+1 & a \\ & & I_{n-2} \end{array} \right)$$

berechnen wir die $(n+1)$ te Spalte von $A_{\sigma^{-1}}$:

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \cdot x_1 x_2 &= (ax_1 + (a+1)x_2)((a+1)x_1 + ax_2) \\ &= (a^2 + a)x_1^2 + (a^2 + a)x_2^2 + x_1 x_2 \\ &\cong (a^2 + a, a^2 + a, 0_{n-2}, 1, 0)^T. \end{aligned}$$

Damit vergleichen wir nun auf beiden Seiten von (3) den Eintrag in der ersten Zeile und $(n+1)$ ten Spalte:

Links:

$$(a^2, a^2 + 1, 0_{n-2}) \left(\begin{array}{cc} I_n & 0_{n \times (N-n)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a^2 + a \\ a^2 + a \\ 0_{n-2} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) = a^2 + a$$

Rechts:

$$\begin{aligned} (a^2, a^2 + 1, 0_{n-2}) \left(\begin{array}{cc} 0_{n \times n} & \hat{Z} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a^2 + a \\ a^2 + a \\ 0_{n-2} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) - z_{11} &= a^2 z_{11} + (a^2 + 1)z_{21} - z_{11} \\ &= (a^2 + 1)(z_{11} + z_{21}) \end{aligned}$$

Setzen wir $c := z_{11} + z_{21}$, so sehen wir, dass $ca^2 + c = a^2 + a$ bzw.

$$(c+1)a^2 + a + c = 0$$

für wenigstens drei verschiedene Werte $a \in K$ erfüllt sein muss. Dies ist ein Widerspruch.

(b) Wir betrachten

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & I_{n-2} & \end{pmatrix}, \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & I_{n-2} & \end{pmatrix} \in G$$

und berechnen die $(n+1)$ te und $(n+2)$ te Spalte von $A_{\sigma^{-1}}$:

$(n+1)$ te Spalte:

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \cdot x_1^{p-1} x_2 &= x_1^{p-1}(-x_1 + x_2) \\ &= -x_1^p + x_1^{p-1} x_2 \\ &\cong (-1, 0_{n-1}, 1, 0)^T \end{aligned}$$

$(n+2)$ te Spalte:

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \cdot x_1^{p-2} x_2^2 &= x_1^{p-2}(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) \\ &= x_1^p - 2x_1^{p-1} x_2 + x_1^{p-2} x_2^2 \\ &\cong (1, 0_{n-1}, -2, 1, 0)^T \end{aligned}$$

Wir vergleichen nun wieder beide Seiten von (3):

(i) erste Zeile, $(n+1)$ te Spalte

Links:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n \times (N-n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0_{n-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

Rechts:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & \hat{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0_{n-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z_{11} = z_{11} + z_{21} - z_{11} = z_{21}$$

Da Gleichheit gelten soll haben wir

$$z_{21} = -1 \tag{4}$$

(ii) zweite Zeile, $(n+2)$ te Spalte

Links:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n \times (N-n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Rechts:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & \hat{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z_{22} = -2z_{21} + z_{22} - z_{22} = -2z_{21}$$

Da $p \geq 3$ ist $2 \neq 0$, und der Vergleich beider Seiten liefert

$$z_{21} = 0,$$

im Widerspruch zu (4). □

Mit obigen Bezeichnungen ist also wegen Satz 6 mit

$$X := U^* \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{U}$$

durch $K[X]^G$ ein Invariantenring ohne die Cohen-Macaulay Eigenschaft gegeben, wobei

$$\dim X = 4 \cdot \dim U + 3 = 4 \cdot n(N - n) + 3 = 4n \left(\binom{n+p-1}{p} - n \right) + 3.$$

Insbesondere für $n = 2$ haben wir $\dim X = 8p - 5$, also hat der kleinste so konstruierbare Modul X die Dimension 11 für $p = 2$. Dabei erlauben die Voraussetzungen von Satz 7 für G insbesondere jede reduktive Zwischengruppe $\mathrm{SL}_n(K) \leq G \leq \mathrm{GL}_n(K)$. Für $p \geq 3$ ist außerdem die von der Matrix im Fall (b) erzeugte Untergruppe isomorph zu der (reduktiven) endlichen Gruppe \mathbf{Z}_p , und noch weitere endliche Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(K)$ erfüllen die Voraussetzungen von (a) bzw. (b), z.B. hat man im Fall (b) mit $n = 4$ und dem Primkörper \mathbf{F}_p mit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & b \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{F}_p \right\}$$

eine Gruppe, die isomorph zu $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ ist.

Sei allgemeiner U ein k -dimensionaler Untervektorraum des unendlich dimensionalen \mathbf{F}_p -Vektorraums K , wobei $\mathrm{char} K = p \geq 2$. Setzt man

$$A(a) := \begin{cases} \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a+1 \end{pmatrix} & \text{für } p = 2 \\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{für } p \geq 3 \end{cases}$$

so gilt $A(a) \cdot A(b) = A(a + b)$. Daher ist $G := \{A(a) : a \in U\} \cong \mathbf{Z}_p^k$, wie man anhand einer Basisdarstellung der Elemente aus U sieht. Damit die Voraussetzungen von Satz 7 erfüllt sind, muss $k \geq 2$ für $p = 2$ bzw. $1 \in U$ für $p \geq 3$ gelten.

Zum Schluß sei noch auf einen anderen Ansatz zur Konstruktion einer nicht zerfallenden, kurzen exakten Sequenz hingewiesen, der jedoch nur im Falle $p = n = 2$ zum Ziel führte. Der Einfachheit halber sei $G = \mathrm{SL}_2(K)$. Man betrachtet nun die kanonische Operation von G auf den homogenen Polynomen vom Grad 2 in zwei Variablen x und y . Setzt man $U := \langle x^2, y^2 \rangle$, $\tilde{U} := \langle x^2, y^2, xy \rangle$ und $\pi : \tilde{U} \rightarrow K$, $\pi(ax^2 + by^2 + cxy) := c$, so ist $0 \rightarrow U \rightarrow \tilde{U} \rightarrow K \rightarrow 0$ eine nicht zerfallende kurze exakte Sequenz. Durch Tensorierung mit \det^{-1} kann man ein Beispiel für $\mathrm{GL}_2(K)$ angeben. Wie gesagt lässt sich dieses Beispiel jedoch nicht auf $p \geq 3$ bzw. $n \geq 3$ verallgemeinern. Abgesehen davon rechnet man leicht nach, dass die so konstruierte Sequenz zu der von Satz 7 mit $n = p = 2$ äquivalent ist.

Literatur

- [1] G. Kemper, *A characterization of linearly reductive groups by their invariants*, Birkhäuser Boston, Transformation Groups, Vol. **5**, No 1, 2000, pp. 85-92.
- [2] G. Kemper, *Invariants of Hopf Algebras*, The Curves Seminar at Queen's, Volume XIII, in: Queen's Papers in Pure and Applied Math. **119** (2000), 37-61.
- [3] M. Hochster, J. Roberts, *Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay*, Adv. in Mat. **13** (1974), 115-175.
- [4] M. Hochster, J. A. Eagon, *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci*, Amer. J. of Math. **93** (1971), 1020-1058.